

第5章 | 数学的な表現の工夫



1 データの表現方法の工夫

A パレート図

B パレート図の活用

教 p.153

練習 1

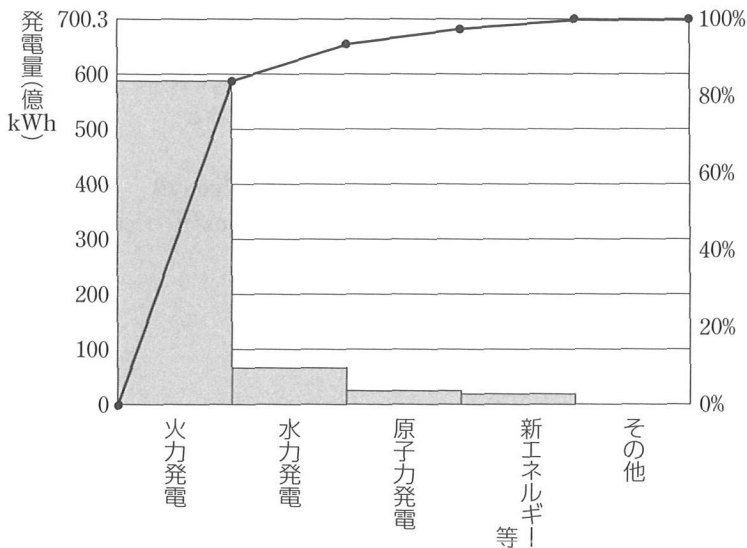
右のデータは、2020年9月における日本の電気事業者について、発電方法とその発電量を調査した結果である。このデータについて、パレート図をかけ。

項目	発電量(億kWh)
火力発電	586.7
水力発電	67.5
原子力発電	27.1
新エネルギー等	18.8
その他	0.2
計	700.3

(資源エネルギー庁ホームページより作成)

指針 **パレート図のかき方** 左側の軸は発電量、右側の軸は累積比率となる。
累積比率は、発電量の合計 700.3(億kWh)と発電量の累積和から求める。

解答





パレート図は、経済学者ヴィルフレド・パレートが提唱したパレートの法則を図式化したものである。パレートの法則について調べてみよう。

解答 全体の数値の8割は、全体を構成する2割の要素が生み出しているという法則。

たとえば、ある会社の売上の8割は、その会社の全商品のうちの2割の商品が生み出している、というような状況を表す。 **【終】**

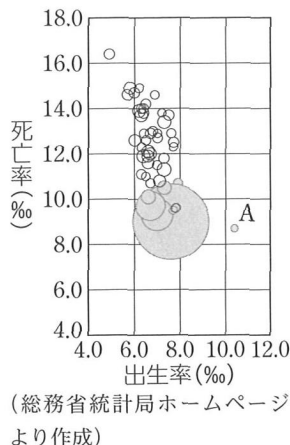
C バブルチャート

練習 2

右のバブルチャートは、2019年における各都道府県の出生率を横軸、死亡率を縦軸、転入超過数(他都道府県からの転入者数から、他都道府県への転出者数を引いた数)の絶対値を円の面積で表したものである。ただし、転入超過数が正のデータは塗りつぶしの円、負のデータは白い円で表している。このバブルチャートから読み取れることとして、正しいものを、次の①～③からすべて選べ。

- ① 地区Aは、出生率が死亡率を上回っており、転入超過数も正の値をとるから、人口は増加している。
- ② 出生率が死亡率を上回っているのは、地区A以外にもある。
- ③ 死亡率が出生率を上回っている都道府県のすべてで人口が減少している。

【注意】 出生率、死亡率の単位‰はパーミルといい、1000分の1を単位として表した比率である。たとえば、8.5‰は0.0085である。



指針 **バブルチャートの読み方** 出生率と死亡率はそれぞれ軸から読み取り、転入超過数は円の大きさや色から読み取る。

③ 人口が減少したかは(出生率)－(死亡率)と転入超過数から考えることができるが、一方が正、もう一方が負の場合、与えられた条件からだけでは読み取ることはできない。

- 解答 ① 地区 A の出生率は 10% より大きく、死亡率は 10% 未満であるから、出生率が死亡率を上回っている。また、転入超過数も正の値をとるから、人口は増加していることがわかる。
- よって、正しい。
- ② 地区 A 以外のすべての地区が、出生率は 8% 以下で、死亡率は 8% より大きい。
- ゆえに、出生率が死亡率を上回っているのは地区 A だけである。
- よって、正しくない。
- ③ 死亡率が出生率を上回っている都道府県のうち、転入超過数が正の値をとる地区がある。このような地区については、人口が減少しているかはこのバブルチャートから読み取ることはできない。
- 以上から、読み取れることとして正しいものは ① ㊞

2 行列による表現

まとめ

1 行列

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ のように、いくつかの数や文字を長方形に書き並べ、両側をカッコで囲んだものを **行列** といい、かっこの中のそれぞれの数や文字を **成分** という。

成分の横の並びを行、縦の並びを **列** といい、 m 個の行と n 個の列からなる行列を **m 行 n 列の行列** または **$m \times n$ 行列** という。

また、第 i 行と第 j 列の交わる場所にある成分を **(i, j) 成分** という。

2 行列の型

2 つの行列 A, B が、行数が等しく、列数も等しいとき、 A と B は **同じ型** であるという。また、行列 A, B が同じ型であり、かつ対応する成分がそれぞれ等しいとき、 A と B は **等しい** といい、 $A=B$ と書く。

3 行列の和と差

同じ型の 2 つの行列 A, B の対応する成分の和を成分とする行列を A と B の **和** といい、 $A+B$ で表す。同様に、対応する成分の差を成分とする行列を A と B の **差** といい、 $A-B$ で表す。

4 行列の実数倍

k を実数とすると、行列 A の各成分の k 倍を成分とする行列を kA で表す。

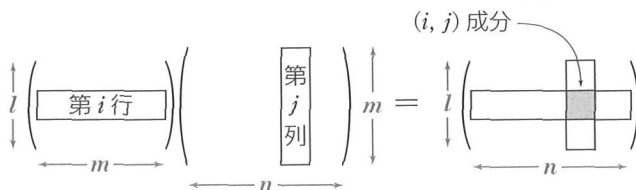
5 行列の積

$1 \times m$ 行列 A と $m \times 1$ 行列 B に対して、次のように対応する成分の積の和を、積 AB と定める。

$$AB = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m$$

さらに、 A が $l \times m$ 行列、 B が $m \times n$ 行列のとき、2つの行列 A 、 B の積 AB を、 A の第 i 行を取り出した $1 \times m$ 行列と B の第 j 列を取り出した $m \times 1$ 行列の積を (i, j) 成分とする $l \times n$ 行列と定める。

A ($l \times m$ 行列) B ($m \times n$ 行列) C ($l \times n$ 行列)



注意 A の列数と B の行数が異なるときには、積 AB は考えない。

A 行列

教 p.159

練習 3

教科書 158 ページの 4 種類のボールペンの販売数について、次の問いに答えよ。

- (1) 4 月において、3 つの店での合計販売数が最も多いのは、どの色のボールペンか。
- (2) 4 種類のボールペンの合計販売数が、4 月より 5 月の方が多いのは、どの店か。

指針 行列による表現の読み取り

- (1) 列ごとに、3 つの店の本数を合計して比較する。
- (2) 行ごとに、4 種類の本数を合計して 4 月と 5 月で比較する。

解答 (1) 4 種類のボールペンの、4 月における 3 つの店の合計販売数は、次のようになる。

$$\text{黒} : 55 + 78 + 43 = 176$$

$$\text{赤} : 61 + 64 + 45 = 170$$

$$\text{青} : 21 + 32 + 20 = 73$$

$$\text{緑} : 13 + 18 + 9 = 40$$

よって、合計販売数が最も多いのは、黒のボールペンである。 **答**

- (2) 4 月、5 月における 4 種類のボールペンの 3 つの店での合計販売数は次のようになる。

店 X 4月: $55+61+21+13=150$ 5月: $50+52+23+16=141$ 店 Y 4月: $78+64+32+18=192$ 5月: $70+64+36+25=195$ 店 Z 4月: $43+45+20+9=117$ 5月: $45+41+9+7=102$

よって、4月より5月の方が多いの、店 Yである。 答

教 p.160

練習
4

次の行列は何行何列の行列か。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad (3) (3 \quad 7) \quad (4) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

指針 行列の型 横の並びが行、縦の並びが列である。

解答 (1) 2行3列 答

(2) 3行3列 答

(3) 1行2列 答

(4) 3行1列 答

教 p.160

練習
5

$$\text{行列} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & -1 & 5 \\ 9 & 8 & -5 & -8 \\ -3 & 6 & 2 & 10 \end{pmatrix} \text{について、次の成分をいえ。}$$

$$(1) (3, 2) \text{成分} \quad (2) (1, 4) \text{成分} \quad (3) (4, 4) \text{成分}$$

指針 行列の成分 (i, j) 成分は i 行目と j 列目が交わる場所にある成分である。

解答 (1) 8 答

(2) 0 答

(3) 10 答

B 行列の和と差

教 p.161

練習
6

教科書 158 ページの各ボールペンの販売数について、4月から5月で最も減ったもの、最も増えたものは、それぞれの店のどの色のボールペンか。教科書 161 ページの A-B を利用して答えよ。

指針 行列の差 $A-B$ の各成分は、4月の販売数と比べて5月の販売数がどれくらい減ったかを表しているから、成分の値を比較する。

解答 $A-B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & -3 \\ 8 & 0 & -4 & -7 \\ -2 & 4 & 11 & 2 \end{pmatrix}$ の各成分は、4月から5月でのそれぞれの店のそ

れぞれの色の販売数の増減を表す。

よって、最大の成分が最も減ったもの、最小の成分が最も増えたものを表す。最大の成分は(3, 3)成分の11であるから、最も減ったものは店Zの青のボールペンである。☐

最小の成分は(2, 4)成分の-7であるから、最も増えたものは店Yの緑のボールペンである。☐

5章

数学的な表現の工夫

教 p.161

練習 7

次の計算をせよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 & -7 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

指針 行列の和と差の計算 対応する成分の和、差を計算する。

解答 (1) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ☐

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -10 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{☐}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 & -7 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{☐}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{☐}$$

C 行列の実数倍

教 p.162

練習 8

教科書 158 ページのボールペンの販売数について、6月の販売数を

表す行列が $C = \begin{pmatrix} 45 & 50 & 22 & 13 \\ 81 & 73 & 39 & 25 \\ 40 & 40 & 13 & 10 \end{pmatrix}$ のとき、4~6月の平均値を表す

行列を求めよ。

指針 行列の実数倍 $A+B+C$ の各成分を $\frac{1}{3}$ 倍する。

解答 $Q=A+B+C$ とすると、求める行列は $\frac{1}{3}Q$ である。

$$A+B=\begin{pmatrix} 105 & 113 & 44 & 29 \\ 148 & 128 & 68 & 43 \\ 88 & 86 & 29 & 16 \end{pmatrix} \text{であったから}$$

$$Q=A+B+C$$

$$=\begin{pmatrix} 105 & 113 & 44 & 29 \\ 148 & 128 & 68 & 43 \\ 88 & 86 & 29 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 & 50 & 22 & 13 \\ 81 & 73 & 39 & 25 \\ 40 & 40 & 13 & 10 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 150 & 163 & 66 & 42 \\ 229 & 201 & 107 & 68 \\ 128 & 126 & 42 & 26 \end{pmatrix}$$

よって、求める行列は

$$\frac{1}{3}Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 150 & 163 & 66 & 42 \\ 229 & 201 & 107 & 68 \\ 128 & 126 & 42 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & \frac{163}{3} & 22 & 14 \\ \frac{229}{3} & 67 & \frac{107}{3} & \frac{68}{3} \\ \frac{128}{3} & 42 & 14 & \frac{26}{3} \end{pmatrix} \quad \text{答}$$

練習
9

教 p.162

$P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ のとき、次の行列を求めよ。

- (1) $2P$ (2) $\frac{1}{3}P$ (3) $(-2)P$ (4) $(-1)P$

指針 行列の実数倍 kP は行列 P の各成分を k 倍した行列である。

解答 (1) $2P = 2 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{答}$

(2) $\frac{1}{3}P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{答}$

(3) $(-2)P = (-2) \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{答}$

(4) $(-1)P = (-1) \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{答}$

D 行列の積

教 p.164

練習
10

教科書 163 ページの例で、自動車 Y、自動車 Z の総得点を行列の積として表し、計算せよ。また、X、Y、Z のうち総得点が最大となる自動車はどれか。

指針 行列の積 Y、Z の総得点はそれぞれ AY 、 AZ であるから、これらを AX と同様に計算する。

解答 自動車 Y の総得点は

$$AY = (5 \ 2 \ 4) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 38 \quad \text{答}$$

自動車 Z の総得点は

$$AZ = (5 \ 2 \ 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 30 \quad \text{答}$$

よって、X、Y、Z のうち総得点が最大となるのは Y である。 答

練習
11

教 p.165

教科書 163 ページの例で、各観点の重要度が右の表のようであるとする。3 つの自動車 X、Y、Z の評価は教科書と同じであるとき、総得点が最小となる自動車はどれか。

観点	a	b	c
重要度	4	3	5

指針 行列の積 重要度を表す行列 $B = (4 \ 3 \ 5)$ と、X、Y、Z を並べた行列 W の積 BW は、3 つの自動車の総得点を表す行列である。

解答 観点の重要度を次の 1×3 行列 B で表すと $B = (4 \ 3 \ 5)$

各自動車の評価を表す行列 X、Y、Z を並べた行列 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ を W とすると、

各自動車の総得点は次のように求められる。

$$\begin{aligned} BW &= (4 \ 3 \ 5) \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \quad 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 2 \quad 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3) \\ &= (40 \ 41 \ 35) \end{aligned}$$

よって、総得点が最小となる自動車は Z である 答

5
章

数学的な表現の工夫

練習
12

次の行列の積を計算せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

指針 行列の積 行列の積の規則に従って計算する。

解答 (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 22$ 答

(2) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ -6 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \end{pmatrix}$ 答

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$ 答

深める

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ について、次の積を求めよう。

(1) AB , BA

(2) AC , CA

解答 (1) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ 答

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ 答

(2) $AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 7 \\ 0 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$ 答

$CA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 7 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 7 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$ 答

参考 行列の積は、順序を入れ替えたときに計算の結果が一致しない場合がある。
つまり、行列 X , Y の積において $XY = YX$ は一般には成り立たない。

3 離散グラフによる表現

まとめ

1 離散グラフ

いくつかの点とそれらを結ぶ何本かの線で表された図を 離散グラフ または単に グラフ という。離散グラフの点を 頂点, 線を 辺 といい, 頂点に集まる辺の本数を, その頂点の 次数 という。また教科書および本書では, 集まる辺の本数が奇数である頂点を 奇点, 偶数である頂点を 偶点 という。

2 連結

離散グラフのどの2つの頂点も、いくつかの辺をたどって一方から他方に行けるとき、離散グラフは連結であるという。

3 一筆書きができる離散グラフ

連結である離散グラフについて、一筆書きができるための必要十分条件は、奇点の個数が0または2であることである。

4 最短経路

それぞれの辺に数を与えた離散グラフを利用すると、ある頂点から別の頂点へ向かう経路のうち、最短経路を調べることができる。

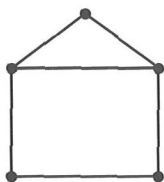
A 一筆書き

教 p.167

練習
13

次の2つの図は、どちらも一筆書きの方法がある。その方法を見つけよ。

(1)



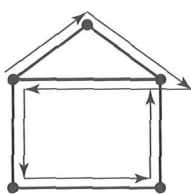
(2)



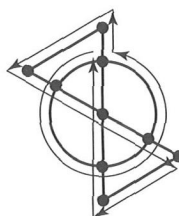
指針 一筆書きの方法 すべての辺を1回だけ通る方法を探す。書き方は1通りではない。

解答 たとえば、次の矢印のように線をたどればよい。

(1)



(2)

練習
14

教 p.168

教科書例3、練習13の図について、奇点、偶点はそれぞれ何個あるか。

指針 奇点と偶点 頂点に集まる辺の本数を数える。

5 章

数学的な表現の工夫

解答 例3

(1) 奇点は2個, 偶点は4個 罫

(2) 奇点は0個, 偶点は6個 罫

練習13

(1) 奇点は2個, 偶点は3個 罫

(2) 奇点は0個, 偶点は9個 罫

練習
15

教 p.169

教科書例4の図[2]の離散グラフは, 一筆書きができない。その理由を説明せよ。

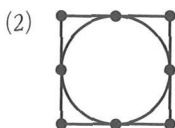
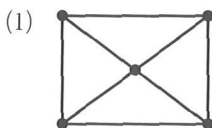
指針 一筆書きができるための必要十分条件 奇点の個数が0または2でなければ一筆書きすることはできない。

解答 一筆書きができるための必要十分条件は, 奇点の個数が0または2である。図[2]の離散グラフには奇点が4個あるから, 一筆書きができない。罫

練習
16

教 p.169

次の離散グラフについて, 一筆書きができるか判定せよ。また, 一筆書きができる場合は, 実際に一筆書きの方法を見つけよ。



指針 一筆書きができるための必要十分条件 奇点の個数が0または2であるかどうかで判定する。

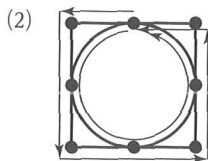
一筆書きの方法は, 始点の決め方が重要である。奇点の個数が0の場合は始点をどこにとってもよい。奇点の個数が2の場合は奇点のうちどちらかを始点とする。このとき, もう一方の奇点が終点となる。

解答 (1) 奇点が4個あるから, 一筆書きはできない。罫

(2) 奇点がないから, 一筆書きはできる。罫

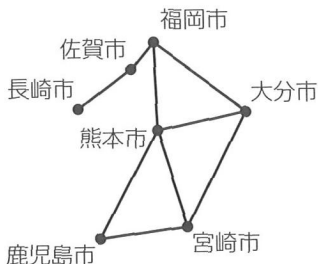
(3) 奇点が2個あるから, 一筆書きはできる。罫

(2), (3)については, たとえば, 次の矢印のように線をたどればよい。



練習
17

右の離散グラフは、九州の7つの県の県庁所在地を頂点で表し、2つの頂点を含む県が陸続きで隣接しているならば、その間を辺で結んだものである。この離散グラフは一筆書きができるか。理由とともに答えよ。



教 p.169

指針 一筆書きができるための必要十分条件 奇点の個数が0または2であるかどうかで判定する。

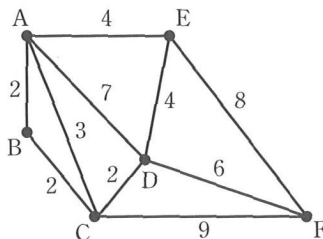
解答 長崎市、福岡市、大分市、宮崎市が奇点である。

よって、奇点が4個あるから、一筆書きはできない。 答

B 最短経路

練習
18

A, B, C, D, E, Fの6駅が右の図のような路線を構成している。この離散グラフの辺に隣接して書かれている数は移動する際の所要時間(分)である。この路線において、AからFまで移動するとき、所要時間が最も短くなる経路を見つけよ。



教 p.170

指針 最短経路 AからFまでの経路の所要時間を1つずつ調べ、最小のものを見つける。

解答 それぞれの経路の所要時間を調べると

- A → B → C → D → E → F では 18 分
- A → B → C → D → F では 12 分
- A → B → C → F では 13 分
- A → C → D → E → F では 17 分
- A → C → D → F では 11 分
- A → C → F では 12 分
- A → D → C → F では 18 分
- A → D → E → F では 19 分
- A → D → F では 13 分

5
章

数学的な表現の工夫

$A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F$ では 19 分

$A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F$ では 14 分

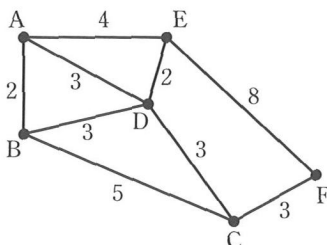
$A \rightarrow E \rightarrow F$ では 12 分

であるから、最も短い所要時間は 11 分で、そのときの経路は

$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F$ 図

練習 19

A, B, C, D, E, F の 6 駅が右の図のような路線を構成している。この離散グラフの辺に隣接して書かれている数は移動する際の所要時間(分)である。この路線において、A から F まで移動するとき、所要時間が最も短くなる経路をダイクストラのアルゴリズムを利用して見つけよ。



教 p.173

指針 最短経路を効率よく調べる方法 教科書 171~173 ページの方法を参考にする
とよい。A から順に所要時間の小さい頂点を探索して数値を確定させていく。

解答 まず、A に 0 を割り当てる。

① A が 0 で確定
② B に 2, D に 3, E に 4 を割り当てる
頂点 B について考える。

① B が 2 で確定
② C に 7 を割り当て、D は 3 のまま
頂点 D について考える。

① D が 3 で確定
② C に 6 を割り当て、E は 4 のまま
頂点 E について考える。

① E が 4 で確定
② F に 12 を割り当てる
頂点 C について考える。

① C が 6 で確定
② F に 9 を割り当てる
頂点 F について考える。

① F が 9 で確定

以上から、頂点 A から頂点 F までの最小の所要時間は 9 分であることがわかり、このときの経路は $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F$ 図

4 離散グラフと行列の関連

まとめ

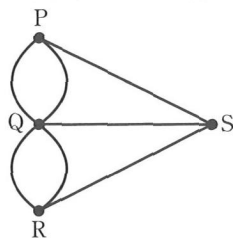
1 隣接行列

n を自然数として、離散グラフの頂点を $P_1, P_2, \dots, P_n$ とする。

このとき、 $n \times n$ 行列 A の (i, j) 成分を、2つの頂点 P_i, P_j を結ぶ辺の本数とする。

このようにして定めた行列 A を離散グラフの隣接行列という。

(離散グラフ)



(隣接行列)

$$A = \begin{pmatrix} P & Q & R & S \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdots P \\ \cdots Q \\ \cdots R \\ \cdots S \end{matrix}$$

2 行列の n 乗

行列 A に A 自身を掛けた積 AA を A^2 と書き、これを行列 A の2乗という。

同様に、自然数 n について A^n すなわち A の n 乗を定義することができる。

3 経路の数え上げ

ある頂点 P から別の頂点 Q への経路を数え上げる際、離散グラフの隣接行列 A を利用できる場合がある。

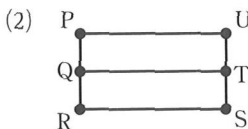
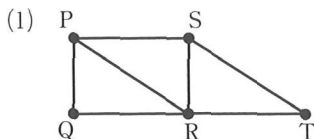
たとえば、辺を2回通って P から Q まで行く経路の総数は、 A^2 を計算してその成分から求めることができる。

A 離散グラフの隣接行列

教 p.175

練習
20

次の離散グラフの隣接行列を求めよ。



指針 離散グラフの隣接行列 隣接する2つの頂点を結ぶ辺の本数を読み取り、行列に表す。

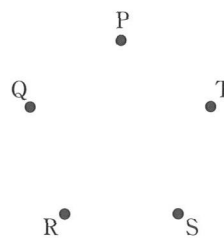
解答 (1)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 答

(2)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 答

練習
21

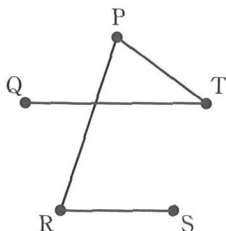
教 p.175

次の隣接行列 A をもつ離散グラフを、右下の図に辺を書き入れて完成させよ。

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} P \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} Q \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} R \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} S \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} T \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots P \\ \cdots Q \\ \cdots R \\ \cdots S \\ \cdots T \end{matrix} \end{pmatrix}$$


指針 隣接行列の表す離散グラフ 2つの頂点を結ぶ辺の本数を隣接行列から読み取り、離散グラフに表す。

解答



B 経路の数え上げ

教 p.177

練習
22

教科書 176 ページで考えた 4 つの都市とそれらを結ぶ 5 本の高速道路について、次の経路の総数を求めよ。ただし、(2)では $Q \rightarrow P \rightarrow Q$ のように同じ高速道路を使う経路も考えることとする。

- (1) 高速道路を 2 回使って、Q から R に行く経路
- (2) 高速道路を 2 回使って、Q を出発して再び Q に戻る経路

指針 経路の総数と行列 A^2 の各成分は、高速道路を 2 回使ってある都市からある都市まで行く経路の総数を表している。

- (1) $Q \rightarrow R$ は (2, 3) 成分, (2) $Q \rightarrow Q$ は (2, 2) 成分である。

解答 $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ である。

- (1) 求める経路の総数は行列 A^2 の (2, 3) 成分であるから 3 答
- (2) 求める経路の総数は行列 A^2 の (2, 2) 成分であるから 5 答

5
章

数学的な表現の工夫

練習
23

教 p.177

教科書 176 ページで考えた 4 つの都市とそれらを結ぶ 5 本の高速道路について、次の問いに答えよ。

- (1) 隣接行列 A について、 A^3 を求めよ。
- (2) 高速道路を 3 回使って、P から R に行く経路の総数を求めよ。
ただし、 $P \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow R$ や、 $P \rightarrow R \rightarrow P \rightarrow R$ のように、同じ高速道路を複数回使う経路も考えることとする。

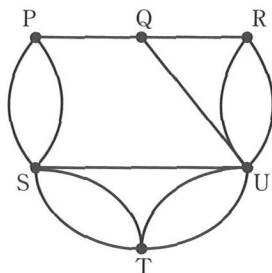
指針 経路の総数と行列 (2) A^2 のときと同様に、 A^3 の成分から経路の総数を読み取る。

解答 (1) $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 13 \\ 5 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 13 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ 答

- (2) 求める経路の総数は行列 A^3 の (1, 3) 成分であるから 5 答

練習
24

右の図はある鉄道会社の主要6駅とその駅を結ぶ路線について、離散グラフに表したものである。たとえば、P駅からS駅へは2つの路線が運行している。



1日に1路線のみを使えと、
 $P \rightarrow Q \rightarrow P$ と移動するには2日かかるとする。

- (1) P駅から出発して、3日目にU駅に到着する経路の総数を求めよ。
- (2) P駅から出発して、4日目にU駅に到着する経路の総数を求めよ。

指針 経路の総数と行列 離散グラフの隣接行列 A について A^3, A^4 を求め、これらの成分から経路の総数を求める。

解答 離散グラフの隣接行列は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 9 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 & 21 & 6 & 10 \\ 9 & 4 & 7 & 6 & 10 & 14 \\ 6 & 7 & 4 & 11 & 6 & 22 \\ 21 & 6 & 11 & 8 & 26 & 20 \\ 6 & 10 & 6 & 26 & 8 & 28 \\ 10 & 14 & 22 & 20 & 28 & 12 \end{pmatrix}$$

求める経路の総数は行列 A^3 の (1, 6) 成分であるから 10 答

$$(2) \quad A^4 = \begin{pmatrix} 51 & 16 & 29 & 22 & 62 & 54 \\ 16 & 30 & 32 & 52 & 40 & 44 \\ 29 & 32 & 51 & 46 & 66 & 38 \\ 22 & 52 & 46 & 114 & 56 & 88 \\ 62 & 40 & 66 & 56 & 108 & 64 \\ 54 & 44 & 38 & 88 & 64 & 134 \end{pmatrix}$$

求める経路の総数は行列 A^4 の (1, 6) 成分であるから 54 答

5章

数学的な表現の工夫